Deducción Natural en Lógica Proposicional

Curso 2014-2015

Mari Carmen Suárez de Figueroa Baonza
mcsuarez@fi.upm.es

Contenidos

- ¿Qué es una deducción?
- Cálculo Deductivo
- Sistemas Formales
- Un Sistema Formal para la Lógica Proposicional
- Deducción Natural: Reglas de Inferencia

¿Qué es una Deducción? (I)

- *Un juego de lógica*: Se ha robado un importante botín. El criminal (o criminales) se dio a la fuga en un coche. Scotland Yard decide interrogar a tres sospechosos, Andy (A), Bill (B) y Carl (C), y consigue determinar los siguientes hechos:
  - (i) En el robo no está implicada ninguna otra persona salvo A, B o C
  - (ii) C nunca trabaja sin llevar a A (y es posible que otros) como cómplice
  - (iii) B no sabe conducir

- **¿Es Andy culpable o inocente?**

¿Qué es una Deducción? (II)

- Juegos como éste consisten en **deducir** la información que se pide a partir de la información dada
  - En este caso la información que se pide es determinar si Andy es culpable
- Veamos un par de modos típicos de razonar para intentar resolver el juego:
  - Reducción al absurdo
  - Prueba por casos

¿Qué es una Deducción? (III)

- Un modo típico de razonar: **Reducción al absurdo**
- Supongamos que A es inocente
  - Dado que C nunca trabaja sin A, si A es inocente, C debe ser también inocente
  - Dado que el criminal huyó en coche y que B no sabe conducir, B no pudo cometer el robo solo:
    - tuvo que ir con A o con C. Así que si A y C son inocentes, B también es inocente
  - Así que si A es inocente, también lo son B y C.
  - Pero sabemos que *al menos uno* es culpable
- Por tanto, no puede ser que A sea inocente

¿Qué es una Deducción? (IV)

- Otro modo típico de razonar: **Prueba por casos**
  - Tenemos 3 posibilidades: A, B o C:
    - Si A lo hizo, A es culpable
    - Si C lo hizo, lo hizo con A, así que A también sería culpable en este caso
    - Si B lo hizo, lo hizo con A o con C:
      - si lo hizo con A, A es culpable
      - si lo hizo con C, entonces también lo hizo con A, así que A es culpable
- Por tanto, A es culpable en cualquier caso

¿Qué es una Deducción? (V)

- Una **deducción** es una secuencia de afirmaciones en la que progresamos a partir de la información conocida (premisas), hasta alcanzar otra información desconocida que nos interesa obtener (conclusión)
- Lo que caracteriza una deducción correcta es que cada paso que demos sea "seguro":
  - cada nueva información debe seguirse de las anteriores

¿Qué es una Deducción? (VI)

- Pueden definirse reglas (de inferencia) que capten los pasos típicos que se efectúan cuando se lleva a cabo una deducción
  - Si una regla está bien elegida, nos conducirá desde cierto enunciado E a otro E’ que es consecuencia lógica de E
  - El proceso por el que pasamos de E a E’ es una *inferencia lógica*
- El sistema que utiliza esas reglas de inferencia para realizar deducciones es un cálculo deductivo
- El contexto o marco formal en el que se utiliza ese cálculo deductivo se llama sistema formal

Cálculo Deductivo

- Motivación para construir un cálculo deductivo:
  - Dificultad para determinar $\Gamma \models$ B por medios semánticos (Γ representa un conjunto de fórmulas)
    - Confirmar la corrección de un argumento puede ser muy costoso
      - En el caso de la Lógica proposicional, hay que explorar un número exponencialmente creciente de valoraciones
  - Alternativa: determinar que **B se deduce de Γ** por medios sintácticos: $\Gamma \vdash$ **B**
    - En lugar de razonar sobre el significado de las fórmulas (valoraciones), razonar sobre la forma de las fórmulas
    - Encontrar un procedimiento que nos permita construir una argumentación paso a paso, manipulando los símbolos de las fórmulas, sabiendo que cada paso es válido
    - Existen distintos tipos de cálculos deductivos (axiomáticos, de secuentes, de tablas analíticas, de deducción natural)
      - Nosotros utilizaremos el **cálculo por deducción natural**

Sistemas Formales (I)

- El análisis de la corrección de un argumento por medios sintácticos se hace siempre en un contexto o marco formal, denominado **sistema formal**
- En un sistema formal *los símbolos carecen de significado*,
  - Al manipularlos hemos de ser cuidadosos y no presuponer nada sobre sus propiedades, salvo lo que se especifique en el sistema

Sistemas Formales (II)

- Un **sistema formal de demostración** consta de:
  - Un lenguaje formal
    - Alfabeto y reglas sintácticas de formación de fórmulas
  - Un conjunto de axiomas lógicos o axiomas (fórmulas válidas sin prueba; podría ser vacío)
  - Un conjunto de reglas de inferencia para demostrar fórmulas: un cálculo
  - Una definición de prueba o demostración

Sistemas Formales (III)

- Una **teoría** T es un sistema formal ampliado con un conjunto Γ de axiomas no lógicos o premisas (es decir, que se consideran como verdad): **T[Γ]**
  - Si $\Gamma = \varnothing$ entonces T es la **teoría básica** del sistema formal
- Una **demostración** o **prueba** de una fórmula B en una teoría T[Γ] (**T[Γ] $\vdash$ B**) es una secuencia finita de fórmulas tal que:
  - toda fórmula de la secuencia es
    - un axioma o premisa de la teoría, o
    - el resultado de aplicar una regla de inferencia a fórmulas anteriores en la secuencia
  - B es la última fórmula de la secuencia

Sistemas Formales (IV)

- Un **teorema** de una teoría $T[\Gamma]$ es una fórmula para la que existe al menos una demostración en $T[\Gamma]$
  - $T[\Gamma] \vdash B$ indica que B se deduce de $T[\Gamma]$ o que B es teorema de $T[\Gamma]$

¿Qué se pide a un Sistema Formal?

- Corrección: **Teorema de validez**
  - Todos los teoremas de T[Γ] son consecuencias lógicas de Γ:
    - **si T[Γ] $\vdash$ B entonces $\Gamma \vDash$ B**
- Completitud: **Teorema de completitud**
  - Dada una teoría T[Γ], todas las consecuencias lógicas de Γ son teoremas de T[Γ]:
    - **si $\Gamma \vDash$ B entonces T[Γ] $\vdash$ B**
- Si el cálculo es correcto y completo entonces $\vdash$ y $\vDash$ son equivalentes

Un Sistema Formal para la Lógica Proposicional (I)

- **Deducción Natural**
  - Lenguaje formal para la Lógica de Enunciados:
    - Conectivas: $\neg$, $\rightarrow$, $\leftrightarrow$, $\vee$, $\wedge$
    - Conjunto enumerable de variables proposicionales: p, q, r, p1, p2, ..., pn
    - Reglas sintácticas de formación de FBFs
  - No hay axiomas lógicos
  - Reglas de inferencia:
    - Diez (dos por cada conectiva): introducción y eliminación
  - Definición de demostración o prueba: una prueba de una fórmula en una teoría es una secuencia finita de fórmulas en la que cada elemento es:
    - Una premisa o un **supuesto** temporal de la teoría, o bien
    - El resultado de la aplicación de una regla de inferencia sobre fórmulas anteriores en la secuencia, y tal que

  La última fórmula de la secuencia es la fórmula probada

Un Sistema Formal para la Lógica Proposicional (II)

- **Demostración o prueba**:

Cómo se presenta una demostración: $T[p \to q, r \wedge \neg q] \vdash r \wedge \neg p$

1:	$p \to q$	premisa
2:	$r \wedge \neg q$	premisa
3:	$\neg q$	$\wedge_{elim2}(2)$
4:	$\neg p$	MT(1,3)
5:	r	$\wedge_{elim2}(2)$
6:	$r \wedge \neg p$	$\wedge_{intro}(4,5)$

- **Premisas y Supuestos**:
  - Las **premisas** corresponden a la información que nos viene dada de antemano (los datos del problema o las fórmulas iniciales)
  - A veces tenemos que introducir información hipotética para comenzar un razonamiento: a esto que introducimos lo llamamos **supuesto**
    - Equivale a las ocasiones en que razonamos comenzando con "Supongamos que..."

Un Sistema Formal para la Lógica Proposicional (III)

- **Premisas y Supuestos**:
  - Ambas son fórmulas añadidas a una teoría básica T y que pueden aparecer en una prueba sin requerir demostración
    - Las premisas se añaden permanentemente
    - Los supuestos se incorporan temporalmente
- Lo que significa usar un supuesto es lo siguiente:
  - «supongamos que A»
  - «entonces demuestro (usando A) que B»
  - «en realidad acabo de mostrar que si tuviera A como premisa, entonces podría demostrar B»
  - «por el teorema de deducción, eso equivale a decir que he demostrado la implicación $A \rightarrow B$»

Deducción Natural: Reglas de Inferencia (I)

- **Reglas de inferencia**:
  - Son reglas que nos permiten justificar nuestras deducciones de conclusiones a partir de premisas dadas
  - Las reglas se suelen expresar de esta manera: $\dfrac{\text{[premisas]}}{\text{[conclusión]}}$
    - Premisas: condiciones que tienen que cumplirse para aplicar la regla
    - Conclusión (o resolvente): resultado de la aplicación de la regla
  - Las reglas de deducción natural son 10, dos por conector:
    - Reglas de la conjunción
    - Reglas de la disyunción
    - Reglas de la negación
    - Reglas del condicional
    - Reglas del bicondicional

Deducción Natural: Reglas de Inferencia (II)

- En la definición de las reglas de inferencia vamos a usar A y B, que no son símbolos de proposición, sino variables sobre formulas del lenguaje (metavariables)
- Mediante metavariables podemos razonar sobre conjuntos (infinitos) de formulas que comparten una misma forma lógica
  - Por ejemplo: $A \wedge \neg A$ agrupa
    - $p \wedge \neg p$, $q \wedge \neg q$, $r \wedge \neg r$, ...
    - $(p \rightarrow q) \wedge \neg(p \rightarrow q)$, $(q \vee r) \wedge \neg(q \vee r)$, ...
    - $((p \rightarrow q) \wedge r) \wedge \neg((p \rightarrow q) \wedge r)$, $(p \vee q \rightarrow r \wedge s) \wedge \neg(p \vee q \rightarrow r \wedge s)$, ...
    - Etc.

Deducción Natural: Reglas de Inferencia (III)

- Cada regla de inferencia es una **metaregla** con infinitas instancias
  - Si p $\vee$ q; si p entonces p $\vee$ (q $\wedge$ $\neg$r); ...
  - Si (p $\rightarrow$ q) entonces (p $\rightarrow$ q) $\vee$ (q $\wedge$ r); si (p $\rightarrow$ q) entonces (p $\rightarrow$ q) $\vee$ ...
    - En general: si A entonces A $\vee$ B

Reglas Básicas: Conjunción (I)

- **Regla de Introducción de Conjunción $\wedge$ ($I_\wedge$)**

$$\frac{\begin{array}{c} A \\ B \end{array}}{A \wedge B}$$

T[p, q] $\vdash$ p $\wedge$ q	
1. p	premisa
2. q	premisa
3. p $\wedge$ q	**$I_\wedge$ (1,2)**

- Ejemplo:
  - *Premisas:*
    - El asesino es diestro
    - El asesino calza un 43
  - *Conclusión:*
    - El asesino es diestro y calza un 43

Reglas Básicas: Conjunción (II)

- **Regla de Eliminación de Conjunción $\wedge$ ($E_\wedge$)**

$$\frac{A \wedge B}{A} \qquad \frac{A \wedge B}{B}$$

$T[p \wedge q] \vdash p$	
1. $p \wedge q$	premisa
2. p	**$E_\wedge$ (1)**

$T[p \wedge q] \vdash q$	
1. $p \wedge q$	premisa
2. q	**$E_\wedge$ (1)**

- Ejemplo:
  - *Premisa:*
    - El asesino es cojo y usa boina
  - *Conclusion:*
    - El asesino es cojo

    o bien

    - El asesino usa boina

Reglas Básicas: Disyunción (I)

- **Regla de Introducción de Disyunción $\vee$ ($I_\vee$)**

$$\frac{A}{A \vee B} \qquad \frac{A}{B \vee A}$$

T[p] ⊢ p ∨ q	
1. p	premisa
2. p ∨ q	**$I_\vee$ (1)**

T[p] ⊢ q ∨ p	
1. p	premisa
2. q ∨ p	**$I_\vee$ (1)**

- Ejemplo:
  - *Premisa:*
    - El asesino mide 1,92 m
  - *Conclusion:*
    - El asesino mide 1,92 m o veranea en Ibiza

    o bien
    - El asesino veranea en Ibiza o mide 1,92 m

Reglas Básicas: Disyunción (II)

- **Regla de Eliminación de Disyunción $\vee$ ($E_{\vee}$) o <u>Prueba por Casos</u>**

$$\frac{A \vee B \quad A \rightarrow C \quad B \rightarrow C}{C}$$

$T[p \vee q, p \rightarrow \neg r, q \rightarrow \neg r] \vdash \neg r$	
1. $p \vee q$	premisa
2. $p \rightarrow \neg r$	premisa
3. $q \rightarrow \neg r$	premisa
4. $\neg r$	**$E_{\vee}$ (1,2,3)**

- Ejemplo:
  - *Premisas:*
    - El asesino huyó en furgoneta o en bici
    - Si huyó en furgoneta, se esconde en Málaga
    - Si huyó en bici, se esconde en Málaga
  - *Conclusion:*
    - El asesino se esconde en Málaga

Ejemplo

- $T[s \wedge (p \vee q), p \rightarrow \neg r, q \rightarrow \neg r] \vdash s \wedge \neg r$
  1. $s \wedge (p \vee q)$ premisa
  2. $p \vee q$ E$\wedge$ (1)
  3. $p \rightarrow \neg r$ premisa
  4. $q \rightarrow \neg r$ premisa
  5. $\neg r$ E$\vee$ (2,3,4)
  6. s E$\wedge$ (1)
  7. $s \wedge \neg r$ I$\wedge$ (5,6)

Reglas Básicas: Negación

- **Regla de Eliminación de Negación ¬ ($E_{\neg}$)**

$$\frac{\neg\neg A}{A}$$

- Ejemplo:
  - *Premisas:*
    - No es el caso que el vecino no fume puros
  - *Conclusión:*
    - El vecino fuma puros

Reglas Básicas: Implicación

- **Regla de Eliminación de Implicación $\rightarrow$ ($E_{\rightarrow}$) o Modus Ponens (MP)**

$$\frac{A \rightarrow B \qquad A}{B}$$

$T[p \rightarrow \neg r, \neg r \rightarrow q, p] \vdash q$		
1.	$p \rightarrow \neg r$	premisa
2.	p	premisa
3.	$\neg r$	**$E_{\rightarrow}$ (1,2)**
4.	$\neg r \rightarrow q$	premisa
5.	q	**$E_{\rightarrow}$ (3,4)**

- Ejemplo:
  - *Premisas:*
    - Si Ramírez es culpable entonces Bárbara le está encubriendo
    - Ramírez es culpable
  - *Conclusión:*
    - Bárbara está encubriendo a Ramírez

Reglas Básicas: Doble Implicación (I)

- **Regla de Introducción de Doble Implicación $\leftrightarrow$ ($I_{\leftrightarrow}$)**

$$\frac{\begin{array}{c} A \rightarrow B \\ B \rightarrow A \end{array}}{A \leftrightarrow B}$$

T[$p \rightarrow \neg r$, $\neg r \rightarrow p$] $\vdash p \leftrightarrow \neg r$		
1.	$p \rightarrow \neg r$	premisa
2.	$\neg r \rightarrow p$	premisa
3.	$p \leftrightarrow \neg r$	**$I_{\leftrightarrow}$ (1,2)**

- Ejemplo:
  - *Premisas:*
    - Si el asesino huyó en furgoneta entonces bebe tequila
    - Si el asesino bebe tequila entonces huyó en furgoneta
  - *Conclusión:*
    - El asesino huyó en furgoneta si y sólo si bebe tequila

Reglas Básicas: Doble Implicación (II)

- **Regla de Eliminación de Doble Implicación $\leftrightarrow$ ($E_{\leftrightarrow}$)**

$$\frac{A \leftrightarrow B}{A \rightarrow B} \qquad \frac{A \leftrightarrow B}{B \rightarrow A}$$

$T[p \leftrightarrow q \wedge r, p] \vdash r$

1.	$p \leftrightarrow q \wedge r$	premisa
2.	$p \rightarrow q \wedge r$	**$E_{\leftrightarrow}$ (1)**
3.	p	premisa
4.	$q \wedge r$	$E_{\rightarrow}$ (2,3)
5.	r	$E_{\wedge}$ (4)

- Ejemplo:
  - *Premisa:*
    - Ramírez es culpable si y sólo si ama a Bárbara
  - *Conclusión:*
    - Si Ramírez es culpable entonces ama a Bárbara

    o bien
    - Si Ramírez ama a Bárbara entonces es culpable

Ejemplos (I)

- $T\ [p,\ p \rightarrow q] \vdash p \wedge q$
  1. p premisa
  2. $p \rightarrow q$ premisa
  3. q $E\rightarrow$ (1,2)
  4. $p \wedge q$ $I\wedge$ (1,3)

- $T\ [p \wedge q \rightarrow r,\ q \rightarrow p,\ q] \vdash r$
  1. $p \wedge q \rightarrow r$ premisa
  2. $q \rightarrow p$ premisa
  3. q premisa
  4. p $E\rightarrow$ (2,3)
  5. $p \wedge q$ $I\wedge$ (4,3)
  6. r $E\rightarrow$ (1,5)

Ejemplos (II)

- T [$p \wedge (q \wedge r)$] $\vdash (p \wedge q) \wedge r$
  1. $p \wedge (q \wedge r)$ premisa
  2. p E$\wedge$ (1)
  3. $q \wedge r$ E$\wedge$ (1)
  4. q E$\wedge$ (3)
  5. r E$\wedge$ (3)
  6. $p \wedge q$ I$\wedge$ (2,4)
  7. $(p \wedge q) \wedge r$ I$\wedge$ (6,5)

- T [$(p \wedge q) \wedge r$] $\vdash p \wedge (q \wedge r)$

Ejemplos (III)

- $T\ [p \rightarrow (q \rightarrow r), p \rightarrow q, p] \vdash r$

1.	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$	premisa
2.	$p \rightarrow q$	premisa
3.	p	premisa
4.	q	$E\rightarrow$ (2,3)
5.	$q \rightarrow r$	$E\rightarrow$ (1,3)
6.	r	$E\rightarrow$ (4,5)

Reglas Básicas: Supuestos (I)

- Nos quedan dos reglas básicas por definir:
  - introducción de la negación o prueba por reducción al absurdo
  - introducción de la implicación o teorema de la deducción
- Ambas se basan en el **empleo de supuestos**, que pueden aparecer en una prueba sin requerir demostración
- Los supuestos se **añaden** sólo **temporalmente**:
  - Un supuesto se introduce en un determinado punto de la prueba y se cancela (descarga) en otro punto posterior
  - Cuando se introduce un supuesto hay que mover la siguiente secuencia de fórmulas hacia la derecha, hasta descargar (o devolver, o cancelar) el supuesto con $I_{\rightarrow}$
  - Como resultado de la cancelación, una nueva fórmula queda demostrada

Reglas Básicas: Supuestos (II)

- **Regla de Introducción de Implicación $\rightarrow$ ($I_{\rightarrow}$) o <u>Teorema de la Deducción</u>**

$$\frac{\begin{array}{c} A \text{ (supuesto)} \\ B \end{array}}{A \rightarrow B}$$

$T[p \rightarrow q, q \rightarrow r] \vdash p \rightarrow r$	
1. $p \rightarrow q$	premisa
2. $q \rightarrow r$	premisa
3. p	supuesto
4. q	$E_{\rightarrow}$ (1,3)
5. r	$E_{\rightarrow}$ (2,4)
6. $p \rightarrow r$	**$I_{\rightarrow}$ (3,5)**

El **supuesto** se introduce en la línea 3 y se cancela en la línea 5

Como resultado de esta cancelación, queda demostrada la fórmula 6

La fórmula 6 (**conclusión**) es un condicional, que tiene como antecedente el supuesto que hemos introducido y como consecuente el enunciado que hemos obtenido a partir de ese supuesto, aplicando reglas de inferencia

- Ejemplo:
  - Supuesto:
    - (supongamos que) la víctima fue envenenada
    - ……….. bla, bla, bla ……….. (secuencia de inferencias válidas)
    - el asesino es el conde Lequio
  - Conclusión:
    - Si la víctima fue envenenada entonces el asesino es el conde Lequio

Supuestos y el Teorema de la Deducción

- Formulación genérica de la **regla de introducción de la implicación**:
  - Siendo T[A1, A2, ..., An] una teoría básica ampliada con un conjunto de n premisas, si la incorporación como supuesto de un fórmula A permite deducir otra fórmula B:
    - $T[A1, A2, \ldots, An] \cup \{A\} \vdash B$

    entonces
    - $T[A1, A2, \ldots, An] \vdash A \rightarrow B$
- **Teorema de la Deducción**: En general, tanto para premisas como para supuestos:
  - **$T[A] \vdash B$ si y sólo si $T \vdash A \rightarrow B$**

Ejemplos

- $T\ [\neg q \rightarrow (p \wedge \neg r)] \vdash \neg q \rightarrow \neg r$
  1. $\neg q \rightarrow (p \wedge \neg r)$ premisa
     2. $\neg q$ supuesto
     3. $p \wedge \neg r$ $E\rightarrow$ (1,2) o MP (1, 2)
     4. $\neg r$ $E\wedge$ (3)
  5. $\neg q \rightarrow \neg r$ $I\rightarrow$ (2,4)

- $T\ [p \rightarrow q,\ q \rightarrow r] \vdash p \rightarrow q \wedge r$
  1. $p \rightarrow q$ premisa
  2. $q \rightarrow r$ premisa
     3. p supuesto
     4. q $E\rightarrow$ (1,3)
     5. r $E\rightarrow$ (2,4)
     6. $q \wedge r$ $I\wedge$ (4,5)
  7. $p \rightarrow q \wedge r$ $I\rightarrow$ (3,6)

Reglas Básicas: Supuestos (III)

- **Regla de Introducción de Negación ¬ ($I_\neg$) o <u>Prueba por Reducción al Absurdo</u>**

$$\frac{\begin{array}{l} A \text{ (supuesto)} \\ B \wedge \neg B \end{array}}{\neg A} \qquad \frac{A \rightarrow B \wedge \neg B}{\neg A}$$

$T[\neg p \rightarrow q \wedge \neg q] \vdash p$

1.	$\neg p \rightarrow q \wedge \neg q$	premisa
2.	$\neg p$	supuesto
3.	$q \wedge \neg q$	MP (1,2)
4.	$\neg\neg p$	**$I_\neg$ (2,3)**
5.	p	$E_\neg$ (4)

El **supuesto** corresponde a la negación de aquello que intentamos concluir
Si alcanzamos una **contradicción** (se cancela el supuesto), significa que nuestro supuesto inicial era erróneo
La **conclusión** es la negación del supuesto

- Ejemplo:
  - Supuesto:
    - (supongamos que) el asesino no huyó a Málaga
    - ……….. bla, bla, bla ……….. (secuencia de inferencias válidas)
    - Ramírez es dentista y no es dentista
  - Conclusión:
    - El asesino huyó a Málaga

Ejemplo

- T [¬p ↔ q, ¬q] ⊢ p

1.	¬p ↔ q	premisa
2.	¬q	premisa
3.	¬p	supuesto
4.	¬p → q	E↔ (1)
5.	q	MP (3, 4) o E→ (3,4)
6.	q ∧ ¬q	I∧ (2,5)
7.	¬¬p	I¬ (3,6)
8.	p	E¬ (7)

Ejercicio

- Demostrar con reglas básicas T $[p \rightarrow q] \vdash \neg q \rightarrow \neg p$

1. $p \rightarrow q$	premisa
2. $\neg q$	supuesto
3. p	supuesto
4. q	E$\rightarrow$ (1,3)
5. $\neg q$	ident (2)
6. $q \wedge \neg q$	I$\wedge$ (4,5)
7. $p \rightarrow q \wedge \neg q$	I$\rightarrow$ (3,6)
8. $\neg p$	I$\neg$ (7)
9. $\neg q \rightarrow \neg p$	I$\rightarrow$ (2,8)

Ejercicio

- Demostrar con reglas básicas $T[q \to r, p \to s, q \vee p] \vdash r \vee s$

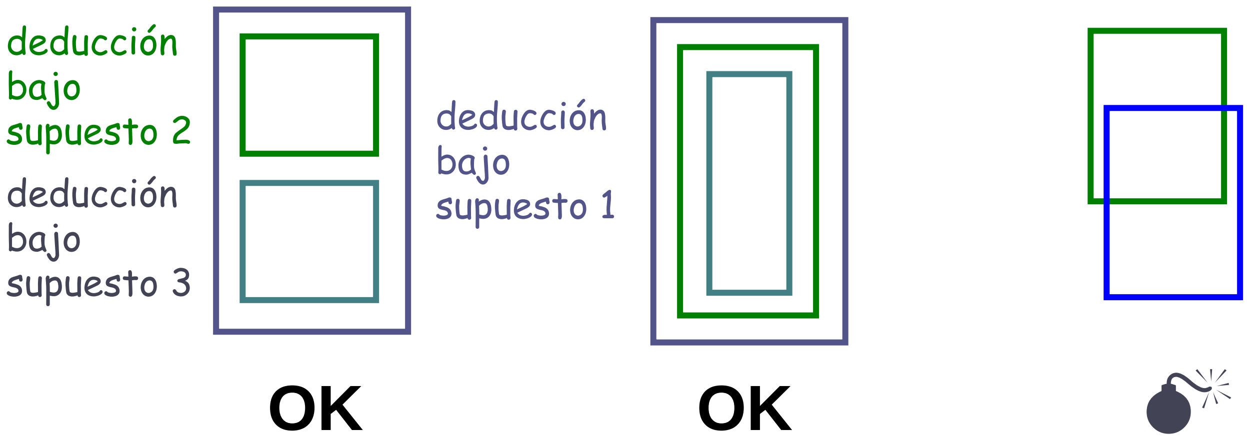
1.	$q \to r$	premisa
2.	$p \to s$	premisa
3.	$q \vee p$	premisa
4.	q	supuesto
5.	r	MP (1,4)
6.	$r \vee s$	I$\vee$ (5)
7.	$q \to r \vee s$	I$\to$ (4,6)
8.	p	supuesto
9.	s	MP (2,8)
10.	$r \vee s$	I$\vee$ (9)
11.	$p \to r \vee s$	I$\to$ (8,10)
12.	$r \vee s$	E$\to$ (3,7,11)

Procedimiento General de Deducción (I)

- Cada premisa y cada nueva fórmula obtenida mediante las reglas de inferencia se escribe en una línea numerada (comenzando por el 1)
- La prueba termina cuando llegamos a una línea, fuera de todo supuesto no cancelado, que contiene la fórmula que queremos deducir (demostrar, probar)

Procedimiento General de Deducción (II)

- Pueden introducirse tantos supuestos como se deseen pero la cancelación de los mismos ha de hacerse con cuidado
  - La **región de un supuesto** es la secuencia de líneas entre la introducción del supuesto (inclusive) y su descarga (no inclusive): básicamente, la parte que se desplaza a la derecha
    - Puede haber regiones anidadas (la que empieza antes termina después)
    - Puede haber regiones totalmente separadas (no comparten líneas)



Ejercicios

- $T[r \rightarrow (q \wedge s), \neg(q \wedge s)] \vdash \neg r$
- $T[p \rightarrow q, r \wedge \neg q] \vdash r \wedge \neg p$

- $T[p] \vdash q \rightarrow p$
- $T[p \rightarrow (q \rightarrow r)] \vdash (p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow r)$
- $T[\neg p \rightarrow \neg q] \vdash (\neg p \rightarrow q) \rightarrow p$
- $T[\neg p \rightarrow \neg q] \vdash q \rightarrow p$
- $T[p \rightarrow q, q \rightarrow r] \vdash p \rightarrow r$
- $T[p \rightarrow (q \rightarrow r), q] \vdash p \rightarrow r$

Reglas Derivadas (I)

- En distintas demostraciones se repiten con frecuencia los mismos pasos (patrones)

$T[r \rightarrow (q \wedge s), \neg(q \wedge s)] \vdash \neg r$	
1. $r \rightarrow (q \wedge s)$	premisa
2. $\neg(q \wedge s)$	premisa
3. r	*supuesto*
4. $q \wedge s$	$E_{\rightarrow}$ *(1,3)*
5. $(q \wedge s) \wedge \neg(q \wedge s)$	$I_{\wedge}$ *(2,4)*
6. $r \rightarrow (q \wedge s) \wedge \neg(q \wedge s)$	$I_{\rightarrow}$ *(3,5)*
7. $\neg r$	$I_{\neg}$ (6)

$T[p \rightarrow q, r \wedge \neg q] \vdash r \wedge \neg p$	
1. $p \rightarrow q$	premisa
2. $r \wedge \neg q$	premisa
3. $\neg q$	$E \wedge$ (2)
4. p	*supuesto*
5. q	$E_{\rightarrow}$ *(1,4)*
6. $q \wedge \neg q$	$I_{\wedge}$ *(3,5)*
7. $p \rightarrow q \wedge \neg q$	$I_{\rightarrow}$ *(4,6)*
8. $\neg p$	$I_{\neg}$ (7)
9. r	$E_{\wedge}$ (2)
10. $r \wedge \neg p$	$I_{\wedge}$ (8,9)

- Aunque son distintas las fórmulas que aparecen en estos dos ejemplos, las líneas destacadas tienen una **estructura común**
- Podríamos acortar las dos demostraciones si previamente demostramos con carácter general que
  - $T[A \rightarrow B, \neg B] \vdash \neg A$, para cualesquiera fórmulas A y B

Reglas Derivadas (II)

- **Reglas derivadas**:
  - Son reglas que nos permiten justificar nuestras deducciones de conclusiones a partir de premisas dadas
  - Aparecen porque en ocasiones es frecuente encontrar estructuras o pasos que se repiten con frecuencia en las demostraciones
    - De esta forma es posible acortar las demostraciones
- Ejemplos:
  - Reglas para la negación
  - Reglas para la implicación
  - Reglas de De Morgan
  - Reglas de corte

Reglas Derivadas (III)

- Las reglas derivadas se representan como las reglas básicas

$$\frac{A \rightarrow B \qquad \neg B}{\neg A}$$

Modus Tollens (MT)

$T[A \rightarrow B, \neg B] \vdash \neg A$	
1. $A \rightarrow B$	premisa
2. $\neg B$	premisa
3. A	supuesto
4. B	$E_{\rightarrow}$ (1,3)
5. $B \wedge \neg B$	$I_{\wedge}$ (2,4)
6. $A \rightarrow B \wedge \neg B$	$I_{\rightarrow}$ (3,5)
7. $\neg A$	$I_{\neg}$ (6)

- Las demostraciones anteriores quedarían ahora

$T[r \rightarrow (q \wedge s), \neg(q \wedge s)] \vdash \neg r$	
1. $r \rightarrow (q \wedge s)$	premisa
2. $\neg(q \wedge s)$	premisa
3. $\neg r$	**MT (1,2)**

$T[p \rightarrow q, r \wedge \neg q] \vdash r \wedge \neg p$	
1. $p \rightarrow q$	premisa
2. $r \wedge \neg q$	premisa
3. $\neg q$	$E \wedge$ (2)
4. $\neg p$	**MT (1,3)**
5. r	$E_{\wedge}$ (2)
6. $r \wedge \neg p$	$I_{\wedge}$ (4,5)

Reglas Derivadas (IV)

- Estas son las **reglas derivadas de uso más frecuente** (*queda como ejercicio su demostración a partir de las reglas básicas*)
  - Reglas de contradicción:
    - $T[A \wedge \neg A] \vdash B$ — Ex Contradictione Quodlibet
  - Reglas para la implicación:
    - $T[A \rightarrow B, B \rightarrow C] \vdash A \rightarrow C$ — Transitividad
    - $T[A \rightarrow B, \neg B] \vdash \neg A$ — Modus Tollens
  - Reglas de corte (silogismo disyuntivo):
    - $T[A \vee B, \neg A] \vdash B$ — Corte
    - $T[A \vee B, \neg B] \vdash A$ — Corte
    - $T[A \vee B, \neg A \vee C] \vdash B \vee C$ — Corte

Teorema de intercambio (o sustitución)

- Sea A una fórmula y B1 una subfórmula de A, si
  - $\vdash$ A
  - $\vdash$ B1 $\leftrightarrow$ B2
  - A' resulta de sustituir en A todas o algunas de las apariciones de B1 por B2

  entonces
  - $\vdash$ A'
    - (De una fórmula A y de la equivalencia B1$\leftrightarrow$B2 se deduce A', el resultado de sustituir en A todos o algunos de los B1 por B2)

T[p $\leftrightarrow$ r, q $\rightarrow$ s, s $\rightarrow$ t $\wedge$ r] $\vdash$ q $\rightarrow$ t $\wedge$ p

1. q $\rightarrow$ s		premisa
2. s $\rightarrow$ t $\wedge$ r		premisa
3.	q	supuesto
4.	s	E$\rightarrow$ (1,3)
5.	t $\wedge$ r	E$\rightarrow$ (2,4)
6.	p $\leftrightarrow$ r	premisa
7.	t $\wedge$ p	**Intercambio (5,6)**
8.q $\rightarrow$ p $\wedge$ t		I$\rightarrow$ (3,8)

Deducción Natural en la Práctica

- Como conclusión, ¿qué podemos utilizar para demostrar la corrección de una argumentación mediante deducción natural?
  - Las 10 reglas básicas
  - Las reglas derivadas mencionadas previamente
    - en ocasiones se piden demostraciones sin usar estas reglas
  - El (teorema de) intercambio
  - Y NADA MÁS

Ejercicios (I)

- Demostrar usando deducción natural y empleando únicamente reglas básicas, las siguientes estructuras deductivas (justificar cada paso):
  - $T[p \rightarrow q] \vdash (p \vee r) \rightarrow (q \vee r)$
  - $T[p] \vdash \neg \neg p$
  - $T[p \rightarrow q, q \rightarrow r] \vdash (p \rightarrow \neg r) \rightarrow \neg p$
  - $T[p \rightarrow q \vee r, q \rightarrow s, r \rightarrow s, \neg s] \vdash \neg p$

Ejercicios (II)

- Demostrar la corrección de las siguientes deducciones mediante deducción natural (justificar cada paso):
  - $T[p \rightarrow q, \neg r \vee q \rightarrow s] \vdash \neg (p \wedge \neg s)$
  - $T[\neg p \vee q, q \vee r \rightarrow s, \neg r \rightarrow p] \vdash s$
  - $\vdash [(p \wedge q) \rightarrow r] \rightarrow [(p \wedge \neg r) \rightarrow \neg q]$

Ejercicios (III)

- Demostrar usando deducción natural y empleando únicamente reglas básicas, la siguiente estructura deductiva (justificar cada paso):
  - $T[p \wedge (q \vee r)] \vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$
- Demostrar el siguiente teorema usando Deducción Natural (se pueden aplicar reglas derivadas):
  - $T\,[\,p \leftrightarrow \neg s] \vdash s \vee \neg p \rightarrow \neg p$
- Indicar, de forma razonada, si hay o no algún fallo en la siguiente demostración por deducción natural

$T\,[p \rightarrow q] \vdash p \vee q$

1.	$p \rightarrow q$	*Premisa*
2.	$\neg p \vee q$	*Def* $\rightarrow$ *1*
3.	q	*Elim* $\vee$ *2*
4.	$p \vee q$	*Int* $\vee$ *3*

Ejercicios (IV)

- Formalizar y probar la validez de los siguientes argumentos (usando deducción natural):
  - No puede suceder a la vez que estemos en verano y nieve en Sevilla. Si estamos en verano, hará calor en Sevilla. Si no nieva en Sevilla, no hará calor en Sevilla. Así pues, no estamos en verano
  - Una condición necesaria y suficiente para que la humanidad sea libre es que los seres humanos no estén ligados por una esencia. Si Dios creó a los humanos, entonces estamos ligados por una esencia. Los humanos somos libres. Por tanto, Dios no creo a los humanos o los elefantes vuelan

Deducción Natural en Lógica Proposicional

Curso 2014-2015

Mari Carmen Suárez de Figueroa Baonza
mcsuarez@fi.upm.es